



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1. (20 puncte)

Pe mulțimea \mathbb{Z} se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Demonstrați că legea „ $*$ ” este asociativă și comutativă;
- Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii \mathbb{Z} în raport cu legea „ $*$ ”;
- Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale astfel încât $m * n * p = 13$ și $m \leq n \leq p$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 13.

Subiectul 2. (20 puncte)

Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$.

- Pentru funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3^{f(x)}}{x} - x$, determinați primitiva $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care verifică condiția $G(2) = 2026$;
- Arătați că $I = \int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4 \ln 3}$;
- Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim $I_n = \int_1^e x f^n(x) dx$.

Demonstrați că $I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3. (20 puncte)

Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Fie, de asemenea, mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | \det(X) = 1\}$.

- Verificați dacă A și B aparțin mulțimii G ;
- Demonstrați că mulțimea G , împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup;
- Demonstrați că, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ este soluție a ecuației $X^2 - X + I_2 = O_2$, atunci $a + d = 1$.

Subiectul 4. (30 puncte)

Cu ocazia unui experiment, s-a observat că intensitatea radiației produsă de o sursă, măsurată într-un punct situat la distanța $a > 0$ față de acea sursă, este dată de formula: $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$.

a) Calculați valoarea intensității radiației măsurată în punctele situate la distanțele $a = 1$ și $a = \sqrt{3}$ față de sursă;

b) Demonstrați că funcția $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ este descrescătoare; interpretați din punct de vedere fizic rezultatul obținut;

c) Demonstrați că are loc relația: $I(a) > \frac{1}{a^2 + 1}$, pentru orice $a > 0$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore; toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.